

## **2.4. Математическая модель кодера**

В рамках изложенной выше концепции построения модели ПсПВД, построение математической модели кодера будет проводиться с условием «замороженных» идеальных КПЦД и декодера, т.е. КПЦД не вносит ошибок, а декодер идеально декодирует код, формируемые кодером. При таких условиях кодер будет являться основным и единственным источником искажения ВД. Эти искажения вносятся на этапе переквантования трансформант преобразований (исключая шум числовых вычислительных элементов и считая их разрядность достаточной) [ ]. Таким образом, одним из этапов будет определение показателей степени искажений (погрешности сжатия) и разработка математической модели, связывающей эти показатели с параметрами, входными данными и условиями функционирования кодера.

Помимо искажений, вносимых кодером, основным выходным эффектом кодера является сжатие исходного кода ВД, показателем которого является плотность кодирования ВД (бит/пиксел), решающим образом определяющая (совместно информативностью КПЦД) скорость передачи видеоданных. Поэтому первым этапом разработки модели кодера будет разработка модели, связывающей этот показатель с параметрами, входными данными и условиями функционирования кодера.

### **2.4.1. Модель показателя результативности кодирования**

Достижимое при сжатии ВД плотность кодирования во многом определяется статистическими параметрами цифровых ВД, поступающих на вход кодера [ ]. Исследованию статистических свойств оптических сигналов посвящено много теоретических и экспериментальных работ [ ]. В частности, в работе [ ] показано,

что двумерная плотность вероятности распределения яркости в изображении достаточно близко аппроксимируется функцией вида

$$(2.4.1) \quad W(Y, Y_{\xi\eta}) = \frac{1}{\bar{Y}^2 [1 - \rho(\xi, \eta)]} \exp \left\{ -\frac{Y + Y_{\xi\eta}}{\bar{Y} [1 - \rho(\xi, \eta)]} \right\} I_0 \left\{ \frac{2\sqrt{Y Y_{\xi\eta}} \rho(\xi, \eta)}{\bar{Y} [1 - \rho(\xi, \eta)]} \right\}, \text{ где}$$

$Y$  и  $Y_{\xi\eta}$  - значения яркости на изображении в двух точках, смещенных одна относительно другой по осям координат  $x, y$  соответственно на  $\xi$  и  $\eta$ ;

$\bar{Y}$  - средняя яркость изображения;

$\rho(\xi, \eta)$  - коэффициент автокорреляции изображения;

$I_0\{*\}$  - функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Эта функция известна в литературе как плотность вероятности распределения квадрата огибающей стационарного нормального случайного процесса при нулевом сигнале [1].

Выражение для одномерной плотности вероятности распределения яркости в изображении получается путем интегрирования  $W(Y, Y_{\xi\eta})$  по переменной  $Y_{\xi\eta}$  в пределах от 0 до  $\infty$ :

$$(2.4.2) \quad W(Y) = \int_0^{\infty} W(Y, Y_{\xi\eta}) dY_{\xi\eta} = \frac{1}{\bar{Y}} \exp \left\{ -\frac{Y}{\bar{Y}} \right\}.$$

Приведенные соотношения показывают, что автокорреляционные характеристики изображения являются одними из наиболее важных его статистических характеристик. В работе [1] показано, что плотность кодирования ВД методами сжатия, устраняющими статистическую избыточность, монотонно возрастает при увеличении коэффициента корреляции между элементами исходного изображения. Поэтому для исследования в качестве основных характеристик изображений, оказывающих решающее влияние на плотность кодирования, были выбраны автокорреляционные характеристики. Среди таких характеристик наиболее широко используются функция (матрица) автокорреляции, площадь автокорреляции

и коэффициент автокорреляции [ ]. Применять подобные характеристики достаточно удобно при использовании в качестве стохастической модели изображения случайный двумерный марковский процесс первого порядка, и получая статистические оценки путем осреднения по ансамблю изображений. Однако, для работы с отдельными изображениями этот подход не корректен, поскольку статистические характеристики отдельно взятого изображения, как правило, существенно нестационарны. В подобных случаях часто используется осредненные одномерные статистические характеристики по элементам строк и столбцов изображения. Для элементов строк коэффициент автокорреляции находится по формуле (для элементов столбцов находится аналогично путем замены исходного изображения транспонированным):

$$(2.4.3) \quad \hat{\rho}_{i,j} = \frac{\sum_{n_x} (\text{Im}[n_x, n_{y_i}] - \overline{\text{Im}}[* , n_{y_i}]) (\text{Im}[n_x, n_{y_j}] - \overline{\text{Im}}[* , n_{y_j}])}{\sqrt{\sum_{n_x} (\text{Im}[n_x, n_{y_i}] - \overline{\text{Im}}[* , n_{y_i}])^2} \sqrt{\sum_{n_x} (\text{Im}[n_x, n_{y_j}] - \overline{\text{Im}}[* , n_{y_j}])^2}}$$

Однако и эти характеристики в общем случае для отдельного изображения нестационарны. В качестве примера приведены графические представления матриц коэффициентов автокорреляции элементов тест-изображения (рис.2.4.А) по строкам (рис.2.4.1.) и столбцам (рис.2.4.2).



Рис.2.4.А.

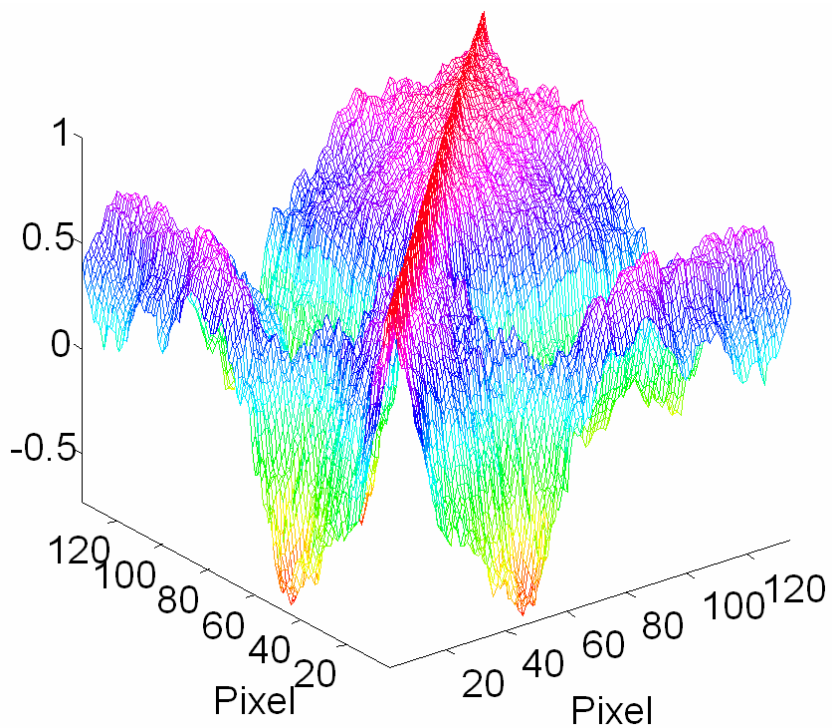


Рис.2.4.1.

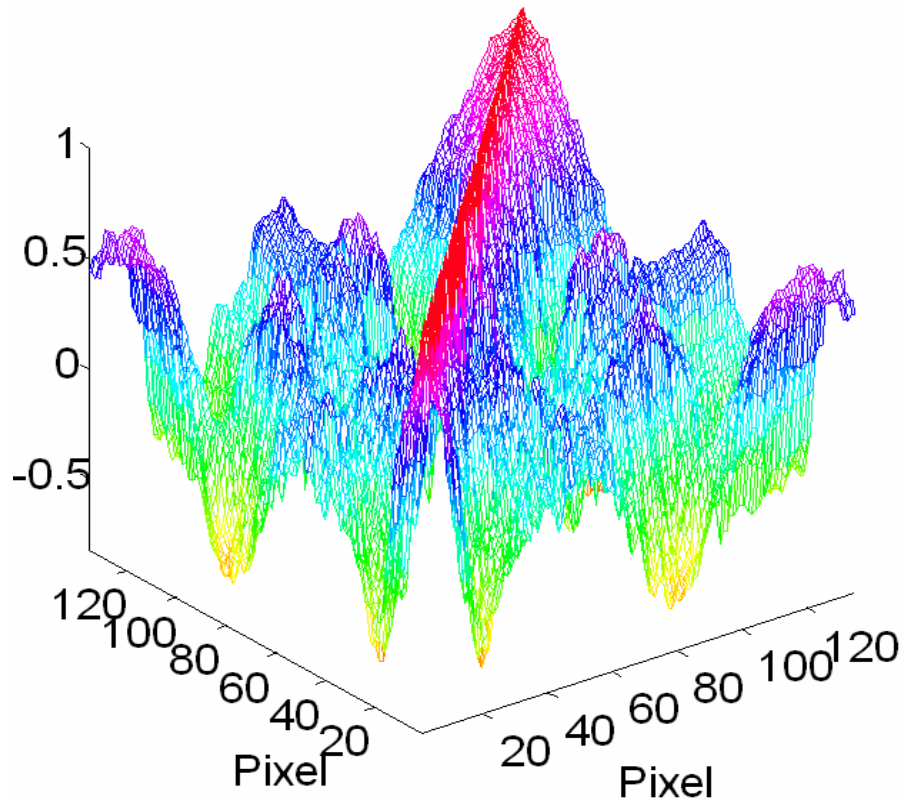


Рис.2.4.2.

Анализ матриц свидетельствует о существенной нестационарности коэффициента корреляции для элементов строк и столбцов. Поэтому для получения осредненных свернутых характеристик степени корреляции элементов изображения значения элементов корреляционных матриц осреднялись по следующему алгоритму :

```
VectKoeffKorr = zeros(1,2*col-1);  
%цикл осреднения  
N=col;  
for k = 1:col,  
    VectKoeffKorr(N:(N+col-1)) = VectKoeffKorr(N:(N+col-1)) + MatrKoeffKorr(k,(1:col));  
    N=N-1;  
end  
%цикл нормировки  
for k = 1:(col-1),  
    VectKoeffKorr(k) = VectKoeffKorr(k)/k;
```

```
VectKoeffKorr(2*col-k) = VectKoeffKorr(2*col-k)/k;
```

```
end
```

```
VectKoeffKorr(col)=VectKoeffKorr(col)/col;
```

В результате формировались осредненные векторы автокорреляции элементов строк и столбцов. В качестве примера на рис.2.4.3 и рис.2.4.4 приведены графические представления таких векторов для матриц, изображенных на рис.2.4.1 и рис.2.4.2.

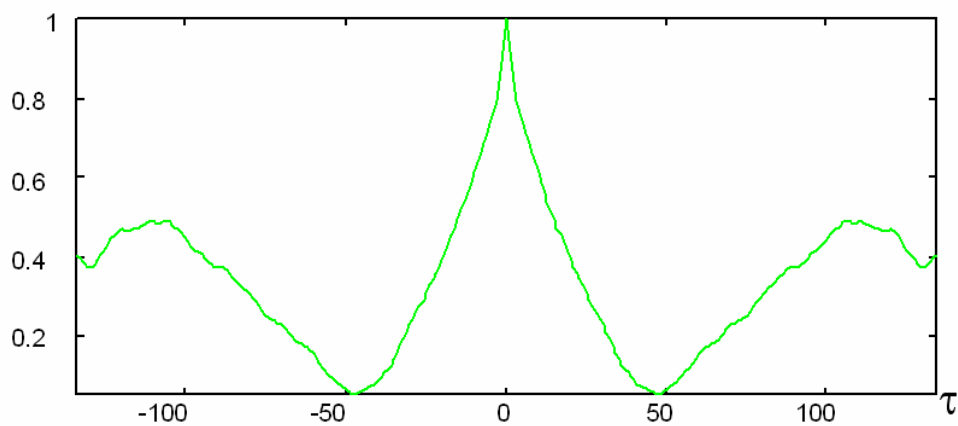


Рис.2.4.3.

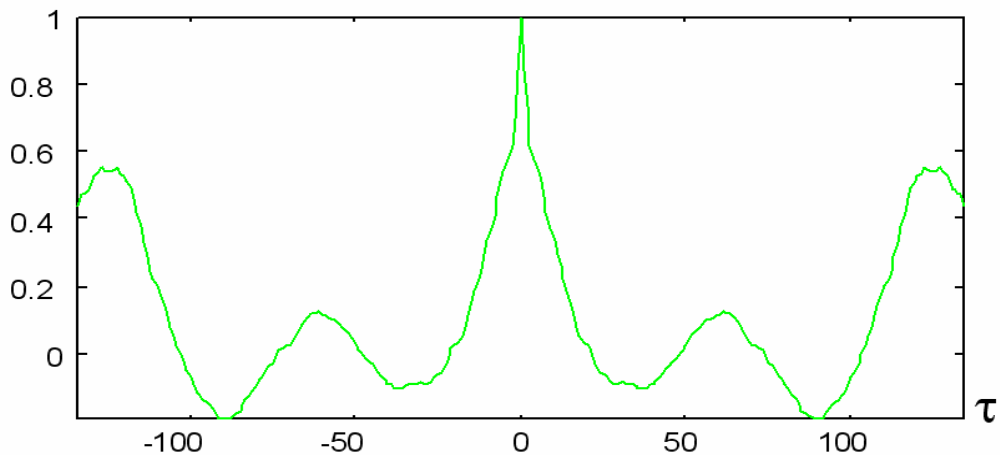


Рис.2.4.4.

Анализ получаемых результатов позволил сделать вывод, что кривые средних арифметических коэффициентов корреляции элементов изображения по строкам и

столбцам  $\rho_{стр}(\tau)$  и  $\rho_{стл}(\tau)$  в окрестностях области определения  $[-N; +N]$ ,  $N \approx 30 \dots 40$  (такая область определения перекрывает все целесообразные размеры окон групповых преобразований) достаточно близко аппроксимируются вектором:

$$(2.4.4) \quad A_\rho = [\rho^N \ \rho^{N-1} \ \dots \ \rho^2 \ \rho \ 1 \ \rho \ \rho^2 \ \dots \ \rho^{N-1} \ \rho^N]$$

являющимся одним из сомножителей дискретной автокорреляционной функции вида

$$(2.4.5) \quad K_\rho = \sigma^2 [\rho^N \ \rho^{N-1} \ \dots \ \rho^2 \ \rho \ 1 \ \rho \ \rho^2 \ \dots \ \rho^{N-1} \ \rho^N] = \sigma^2 A_\rho,$$

используемой в качестве стохастической модели случайного дискретного марковского процесса первого порядка. Поскольку в используемые для аппроксимации кривых  $\rho_{стр}(\tau)$  и  $\rho_{стл}(\tau)$  модели вида (2.4.4) как правило имеют различные основания (параметры  $\rho_{стр} \neq \rho_{стл}$ ), в качестве обобщенного показателя степени автокорреляции изображения было выбрано среднее геометрическое этих параметров:

$$(2.4.6) \quad S = \sqrt{\rho_{стл} \rho_{стр}}.$$

Однако, как было установлено в ходе исследований, *достигаемая плотность кодирования изображений при фиксированных параметрах алгоритма не определяется целиком показателями степени коррелированности элементов изображения на основе коэффициентов корреляции*. Для подтверждения этого тезиса достаточно взять одно изображение и путем поточечного линейного преобразования сгенерировать ряд дочерних изображений, для которых все показатели на основе коэффициентов автокорреляции элементов будут одинаковы (вследствие нормирования по отношению к дисперсии элементов изображения), однако контраст изображений будет разный, и затем подвергнуть эти изображения сжатию. В качестве примера на рис.2.4.5 показаны экспериментальные данные (точки и их линейные аппроксимации), отражающие зависимость плотности

кодирования от среднего контраста изображения. В качестве исходного бралось изображение (Рис.2.4.А.) и дочерние изображения с линейно преобразованным контрастом (на графике исходному изображению соответствует начало оси ординат, изображения пронумерованы в порядке уменьшения контраста). Затем изображения подвергались сжатию с фиксированными параметрами алгоритма JPEG.

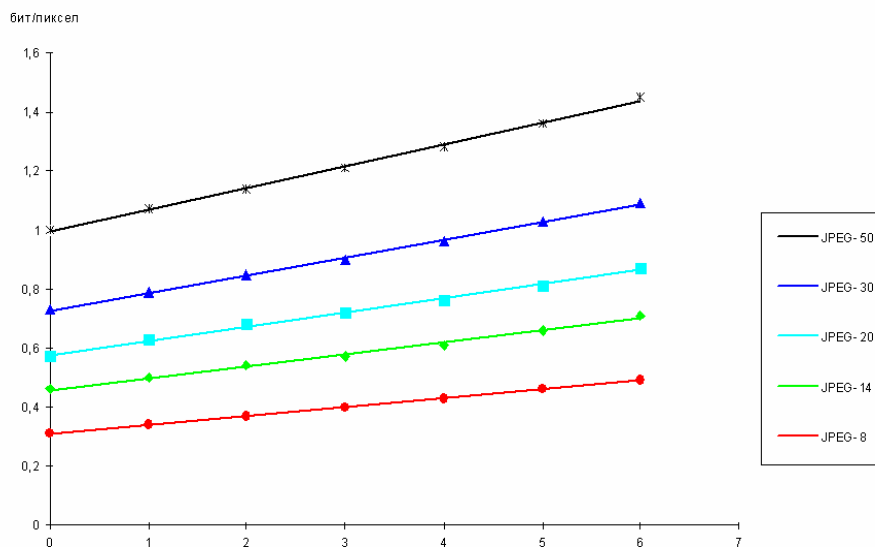


Рис.2.4.5.

Анализ полученных результатов подтверждает вывод, что плотность кодирования изображений определяется не только показателями на основе коэффициента автокорреляции, но и контрастом изображений - с уменьшением контраста (при фиксированных параметрах алгоритма сжатия) плотность кодирования монотонно уменьшается.

Таким образом для построения модели показателя результативности кодирования необходимо выбрать также показатель контраста изображения, по отношению к которому будет чувствителен показатель результативности кодирования. Поскольку, как было установлено ранее, ИО алгоритмов сжатия обладают чувствительностью к дифференциальным характеристикам тест-



изображений и дифференциальные характеристики определяют контрастность изображения, были исследованы стохастические характеристики градиентов изображений. Было установлено, что в качестве достаточно адекватного показателя среднего контраста изображения может быть использован параметр  $\mu$  аппроксимации экспоненциальным законом распределения плотности распределения модуля нормированного к средней яркости градиента изображения

$$(2.4.7) \quad SNGrad^Y [i, j] = \text{abs}(SGrad^Y [i, j]) / \text{Norm}[i, j], \text{ где} \\ \text{Norm}[i, j] = (Y[i, j] + Y[i+1, j] + Y[i, j+1]) / 3.$$

В качестве примера на рис.2.4.6 приведена гистограмма модуля нормированного к средней яркости градиента изображения и ее аппроксимация экспоненциальным законом распределения

$$(2.4.8) \quad f(SNGrad^Y) \approx \mu e^{-\mu SNGrad^Y}$$

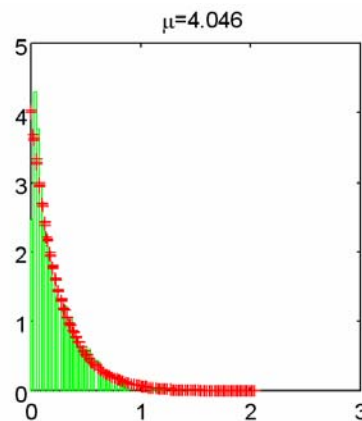


Рис.2.4.6.

Экспериментальные исследования подтвердили чувствительность показателя плотности кодирования по отношению к показателю среднего контраста. В качестве примера на рис.2.4.7 показаны экспериментальные данные (линейные регрессии,  $R^2$

- мера определенности по Линдеру [ ]), отражающие зависимость статистического среднего плотности кодирования от среднего контраста изображения. В качестве исходных данных брались изображения с одинаковым показателем степени автокорреляции ( $S=0,91$ ) для которых определялись значения показателя  $\mu$  и осуществлялось сжатие алгоритмом JPEG.

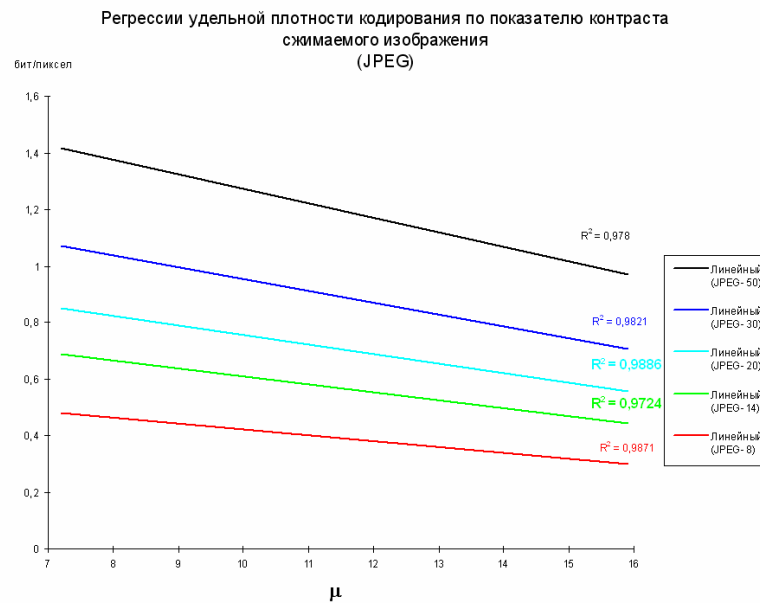


Рис.2.4.7.

Как показали исследования, для фиксированных  $\mu$  и  $S$  плотность распределения показателя результативности кодирования имеет плотность распределения, близкую к нормальной. Поэтому для полного математического описания статистической зависимости плотности кодирования от  $\mu$  ( $S=const$ ) достаточно экспериментально оценить регрессию и зависимость дисперсии от  $\mu$ .

Таким образом, для фиксированных параметров алгоритма сжатия  $A(\bar{p} = const)$  и параметра  $S$  входных данных математическая модель плотности кодирования будет представлять собой однопараметрический случайный гауссовский процесс с независимыми значениями:

$$(2.4.9) \quad \hat{n}_{\mu} = N\{m_{\hat{n}_{\mu}}(\mu), \sigma_{\hat{n}_{\mu}}(\mu)\}.$$

Далее были проведены экспериментальные исследования чувствительности показателя плотности кодирования по отношению к показателю корреляции элементов изображения (при фиксированном среднем контрасте). В качестве примера на рис.2.4.8 показаны экспериментальные данные, отражающие зависимость статистического среднего плотности кодирования от показателя  $S$ . В качестве исходных данных брались изображения с одинаковым показателем среднего контраста ( $\mu=11$ ) для которых определялись значения показателя  $S$  и осуществлялось сжатие алгоритмом JPEG.

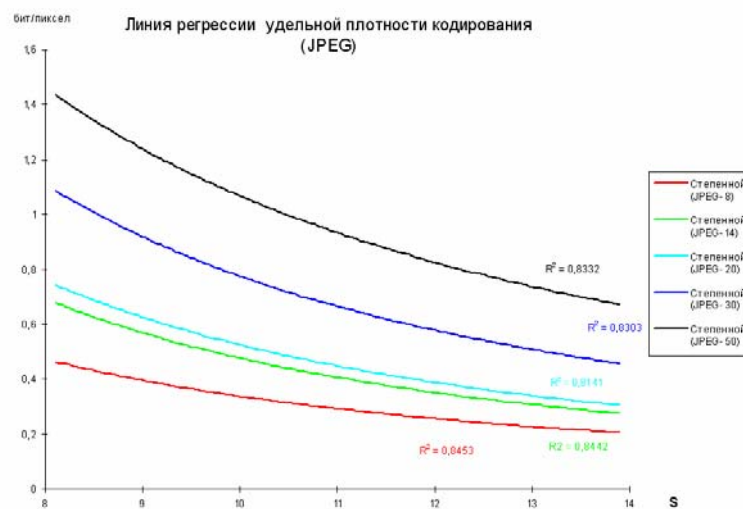


Рис.2.4.8.

Как было определено ранее, для фиксированных  $\mu$  и  $S$  плотность распределения показателя результативности кодирования имеет плотность распределения, близкую к нормальной. Поэтому для полного математического описания статистической зависимости плотности кодирования от  $S$  ( $\mu=\text{const}$ ) также достаточно экспериментально оценить регрессию и зависимость дисперсии от  $S$ .

Таким образом, для фиксированных параметров алгоритма сжатия  $A(\bar{p} = \text{const})$  и параметра  $\mu$  входных данных математическая модель плотности кодирования будет представлять собой однопараметрический случайный гауссовский процесс с независимыми значениями:

$$(2.4.10) \hat{n}_s = N\{m_{\hat{n}_s}(S), \sigma_{\hat{n}_s}(S)\}.$$

Исходя из статистической независимости параметров  $S$  и  $\mu$  и основываясь на (2.4.9) и (2.4.10) нетрудно построить *двухпараметрическую математическую модель плотности кодирования: случайный гауссовский процесс с независимыми значениями:*

$$(2.4.11) \hat{n}_{A(\vec{p}_i)} = N\{m_{A(\vec{p}_i)}(\mu, S), \sigma_{A(\vec{p}_i)}(\mu, S)\}, \vec{p}_i \in P, \text{ где}$$

$P$ - множество допустимых векторов параметров алгоритма.

Поскольку множество допустимых векторов параметров алгоритма конечно и счетно, задаваясь требуемыми значениями точности и требуемой статистической надежности экспериментальным путем нетрудно получить для любых значений  $\vec{p}_i$  заданного алгоритма оценки параметров модели показателя результативности кодирования (2.4.11).

Решив первую задачу - построения математической модели показателя результативности кодирования и определив на ее основе вектор статистических характеристик ВД  $\vec{D}_f = \langle S, \mu \rangle$ , оказывающих существенное влияние на результативность кодирования, целесообразно перейти к следующему этапу построения математической модели кодера - определению показателя  $\bar{\eta}$  степени искажений (погрешности сжатия).

#### **2.4.2. Модель оператора преобразования ВД кодером**

Несмотря на невыполнение, в строгом смысле, основных условий для линейной пространственно-инвариантной модели, любой специалист, занимавшийся сжатием видеоданных для различных целей, может отметить явное сходство рассматриваемых алгоритмов с фильтрами пространственных частот. Более того, математика, положенная в основу алгоритмов JPEG и WIC предполагает собой использование аппарата полосовой фильтрации в качестве базового группового преобразования [ ]. Таким образом, резонно будет предположить возможность

использования линейной модели для аппроксимации (с определенной точностью) звена сжатия-восстановления по крайней мере для алгоритмов JPEG и WIC. На практике подобным образом поступают линеаризуя оптические системы [ ]. Наличие комы и астигматизма делает систему неизопланарной в целом, однако в силу того, что поле зрения всегда можно разбить на зоны, в пределах которых условие изопланарности выполняется с определенной точностью и функция рассеяния точки в ее пределах изменяется незначительно, плоскости формирования изображений разбивают на квазиизопланарные зоны.

Ниже будет предложена похожая модель, позволяющая с достаточной для инженерных расчетов точностью линейно аппроксимировать кодер.

#### **2.4.2.1. Средний импульсный отклик алгоритма сжатия и средняя функция передачи модуляции**

В отличие от оптических систем, алгоритмы сжатия не позволяют разбить на зоны сжимаемое изображение, в пределах которых импульсный отклик изменяется незначительно. Как раз наоборот, как показано выше, алгоритмы сжатия обладают *локальной* неизопланарностью. Т.е. как раз в пределах минимальных сегментов пространственного разбиения импульсные отклики наиболее отличаются один от другого.

Однако, как уже отмечалось выше (п.2.3.), количество возможных ИО конечно и зависит от размеров сегментов, на которые алгоритм сжатия разбивает исходное изображение и обрабатывает независимо от других сегментов. Таким образом существует возможность рассчитать *гипотетический* средний импульсный отклик (СИО). Поскольку исходное изображение всегда разбивается на целое число

сегментов (при невыполнении этого условия оно доопределяется), весовые коэффициенты при вычислении среднего ИО для каждого варианта отклика равны единице. Остается пока открытым вопрос, как учитывать нелинейность ИО, ответ на который будет дан несколько позже, а пока ограничимся тем, что вычисление СИО произведем для тест-импульса  $\{A_{ТИ}=135, Я_{Ф}=15\}$ .

На рис.2.4.9а,д приведены СИО для алгоритма JPEG (СИО<sub>JPEG-20,50</sub> $\{A_{ТИ}=135; Я_{Ф}=15\}$ ), полученные как математическое среднее всех возможных комбинаций ( $V_{ИО}=64$ ) нормированных ИО сжатого тест-изображения  $Tst^{15:135}$ . Размерность квадратной матрицы СИО $[N^{СИО} \times N^{СИО}]$ , как и для ИО, определяется максимально возможным радиусом ИО (2.12). Тогда для заданных значений параметров алгоритма сжатия

$$(2.4.12) \quad СИО^{A_{ТИ}:Я_{Ф}}[i, j] = \frac{1}{W^2} \sum_{k=0}^{w-1} \sum_{l=0}^{w-1} ИО^{A_{ТИ}:Я_{Ф}:K(k,l)}[i, j].$$

Из теории Фурье-анализа известно, что если  $f [ ]$ - произвольная бесконечная периодическая двумерная решетчатая функция -

$$(2.4.13) \quad f[n_x + \alpha N_x, n_y + \beta N_y] = f[n_x, n_y], \text{ где } \alpha, \beta \in Z,$$

то комплексный бесконечный периодический дискретный спектр Фурье

$$(2.4.14) \quad S[\omega_x + \alpha \Omega_x, \omega_y + \beta \Omega_y] = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} f[n_x, n_y] \exp(-j2\pi[\frac{n_x \omega_x}{N_x} + \frac{n_y \omega_y}{N_y}]) = F\{f\}, \text{ где}$$

$\Omega_* = 2\pi/N_*$ -частотный период спектра,

$F\{*\}$ -оператор прямого дискретного преобразования Фурье (ДПФ),

можно представить в виде

$$(2.4.15) \quad S[\omega_x, \omega_y] = A[\omega_x, \omega_y] e^{-j \varphi[\omega_x, \omega_y]}, \text{ где}$$

$A[\omega_x, \omega_y]$  и  $\varphi[\omega_x, \omega_y]$  амплитудный и фазовый спектры соответственно.

Тогда обратное ДПФ

$$(2.4.16) \quad F^{-1}\{S[\omega_x, \omega_y]\} = \sum_{\omega_x=0}^{\Omega_x-1} \sum_{\omega_y=0}^{\Omega_y-1} S[\omega_x, \omega_y] \exp(j2\pi[\frac{n_x \omega_x}{\Omega_x} + \frac{n_y \omega_y}{\Omega_y}]) = f[n_x + N_x, n_y + N_y], \text{ где}$$

$F^{-1}\{*\}$ -оператор обратного ДПФ.

Спектральные характеристики широко используются при анализе и синтезе многозвенных дискретных линейных систем вследствие изоморфизма операций свертки (2.3.9) в области функции и умножения в спектральной области и свойств коммутативности и ассоциативности:

$$(2.4.17) \quad F\{f(i,j)\otimes H(i,j)\}=F\{f(i,j)\}F\{H(i,j)\}.$$

В качестве характеристик линейной изопланарной системы используют понятие комплексной передаточной функции  $PF$ , имеющей смысл отношения спектров выходной функции к спектру входной. Так, если на вход линейной изопланарной системы с ИО  $H(i,j)$  подается входной сигнал  $f(i,j)$ , а на выходе формируется сигнал  $g(i,j)$  (2.3.9), передаточная функция может быть найдена

(2.4.18)

$$PF(\omega_x, \omega_y) = \frac{F\{g(i,j)\}}{F\{f(i,j)\}} = \frac{S^g(\omega_x, \omega_y)}{S^f(\omega_x, \omega_y)} = \frac{A^g(\omega_x, \omega_y)}{A^f(\omega_x, \omega_y)} \exp\{\varphi^g(\omega_x, \omega_y) - \varphi^f(\omega_x, \omega_y)\} = APF(\omega_x, \omega_y) \exp\{FPF(\omega_x, \omega_y)\}$$

где  $APF$  и  $FPF$  - функции передачи амплитуды и фазы соответственно.

Для получения спектральных передаточных характеристик линейных изопланарных систем (в общем случае их называют линейными с постоянными параметрами - ЛПП) используют в качестве тестовых сигналы с широким спектром, для дискретных систем таким сигналом является единичный импульс [ ].

Таким образом, на основе СИО можно рассчитать гипотетические средние  $APF$  и  $FPF$ , подставляя в (2.4.18) вместо  $g(i,j)$  и  $f(i,j)$  СИО и тест-импульс. Тогда гипотетическую среднюю ФРТ  $H(i,j)$  можно получить используя обратное ДПФ (2.4.16) и спектр идеального единичного импульса.

На рис.2.4.9б÷г и е÷з соответствующие СИО (а, д) средние ФПМ, ФПФ и ФРТ для алгоритма JPEG-20 и JPEG-50. Нетрудно заметить, что при изменении параметров алгоритмов сжатия в сторону повышения качества восстановленного

изображения полоса пространственных частот, пропускаемых алгоритмом JPEG увеличивается. Кроме того характерно, что фазовые искажения, во-первых, присутствуют только для практически подавленных пространственных частот, а во-вторых, с изменением параметров алгоритмов в сторону уменьшения потерь сжатия фазовые искажения стремятся к нулю.

Таким образом, СФПМ хотя и несколько опосредовано, но тем не менее объективно отражает качественные характеристики алгоритма JPEG. Аналогичные результаты были получены и для алгоритма WIC. Следующим этапом необходимо уточнить, для какой амплитуды тест-импульсов необходимо использовать СИО, и насколько адекватно линейная модель в лице СФРТ (или соответствующая ей СФПМ) описывает кодер на базе алгоритмов WIC и JPEG, и в случае недостаточной адекватности как возможно ее уточнить.

#### ***2.4.2.2. Методика линеаризации модели***

Как отмечалось выше, остался открытым вопрос, на основе какого тест-импульса находить эквивалентную СФРТ (ЭСФРТ) кодера. Также является открытым вопрос, достаточно ли адекватно описывает ЭСФРТ оператор преобразования, или одной ее недостаточно. Поскольку ранее была установлена нелинейность ИО алгоритмов, найти некую конкретную ЭСФРТ для фиксированных значений параметров алгоритма при условии, что сжимаемые изображения будут различными невозможно. Потому задача нахождения эквивалентной СФРТ (т.е. линеаризации) на начальном этапе может быть решена лишь при “замороженных” входных данных. Поэтому в рамках исследования задача решалась в три этапа. На первом этапе для фиксированных значений параметров алгоритма находилось множество СФРТ для различных  $A_{TI}$ . Далее решалась задача нахождения ЭСФРТ для одного отдельно взятого изображения и формирование



модели оператора преобразования. Затем на основе полученной модели и множества ЭСФРТ, найденных для различных изображений, находились характеристики изображений, к которым чувствительны ЭСФРТ и “замораживание” которых позволяет использовать единственную СФРТ для всех изображений с заданными фиксированными значениями этих характеристик. Методика решения этих задач будет рассмотрена на примере алгоритма JPEG.

На первом этапе сначала были получены возможные варианты СФРТ для различных значений параметров алгоритма JPEG и различных амплитуд тест-импульсов. Поскольку ИО алгоритма чувствителен к дифференциальной яркости ТИ, яркость фона была фиксирована ( $Y_{\phi}=15$ ). На рис.2.4.10÷2.4.11 приведены пространственные фильтры с окном  $7 \times 7$ , эквивалентные СФРТ для параметров алгоритма JPEG- $\{10, 20, 30\}$ .

Для нахождения ЭСФРТ, наиболее близко соответствующей гипотетическому фильтру, реализуемому кодером, рассматривались производные от одного изображения: изображение, подвергнутое процедуре сжатия-восстановления и изображение, свернутое с пространственным фильтром, соответствующим СФРТ, полученной для аналогичных параметров алгоритма сжатия. Исходные изображения представляли собой фрагменты синтезированных оптико-электронных снимков. Далее изучалась невязка модели на основе СФРТ - разность модельного и реально сжатого изображения. Анализ гистограмм разностных изображений показал, что они с достаточной точностью аппроксимируются гауссоидой с нулевым средним. Было установлено, что на множестве возможных СФРТ дискретная функция значений СКО невязки модели имеет один глобальный минимум. Поэтому для оценки степени адекватности СФРТ реальному оператору использовался критерий минимума СКО разности модельного и реального изображений.

В качестве примера на рис.2.4.13. приведены исходное изображение (а), сжатое алгоритмом JPEG-30 (б) и четыре модельных изображения (в÷е). Модельные изображения получены путем свертки исходного изображения с пространственными фильтрами с окном  $7 \times 7$ , соответствующими СФРТ, полученными для  $A_{\text{ТИ}} = \{55, 135, 195, 235\}$  и нормированными с условием сохранения средней яркости изображения. На рис.2.4.14 (а÷г) показаны соответствующие гистограммы попиксельной невязки моделей (гистограммы разностей между реально сжатым изображением (рис.2.4.13б) и модельными изображениями (рис.2.4.13 в÷е)) и их аппроксимации гауссиодами. На рис.2.4.14д показана дискретная функция СКО невязки моделей на основе СФРТ для различных  $A_{\text{ТИ}}$  с шагом 20 градаций яркости. Минимум эта функция имеет при СФРТ  $\{A_{\text{ТИ}} = 195\}$ , таким образом ЭСФРТ  $\equiv$  СФРТ  $\{A_{\text{ТИ}} = 195\}$ .

Анализ спектральной плотности мощности шумов невязки моделей на основе СФРТ позволил сделать вывод, что использования в качестве модели оператора преобразования ВД кодером одного линейного фильтра на основе ЭСФРТ некорректно ввиду относительного высокого уровня шумов невязки модели. Энергия этих шумов неравномерно распределена по пространственным частотам, и в основном сосредоточена в полосе частот, пропускаемых частотным фильтром, эквивалентным ЭСФРТ. В качестве примера на рис.2.4.14е показана СПМ шума невязки модельного изображения на основе ЭСФРТ  $\{A_{\text{ТИ}} = 195\}$ . Этот факт имеет достаточно логичную математическую интерпретацию - этот шум обусловлен ошибкой квантования трансформант группового преобразования, не подвергающихся обнулению, и поэтому шум квантования трансформант является непосредственным источником шума невязки линейной модели кодера.

Таким образом более адекватным будет использования линейно-аддитивно-шумовой модели. Однако поскольку использование в моделях шумов с неравномерной СПМ как правило затруднительно, полученные выше результаты

позволяют вполне корректно перейти к использованию аддитивного гауссовского шума. Поскольку операция отсечки (обнуление) трансформант преобразований, в какой-то степени эквивалентная операции фильтрации, происходит после квантования трансформант, логично представить использование аддитивного зашумления в математической модели в качестве операции, предшествующей операции фильтрации. В этом случае параметры аддитивного белого шума будут определяться на основе известного равенства, связывающего спектральные плотности функции до линейной фильтрации и после нее [ ]. Так, если функции  $f(i,j)$  и  $g(i,j)$  связаны между собой уравнением (2.4.18), их СПМ связаны равенством:

$$(2.4.19) \quad SPM^g(\omega_x, \omega_y) = APF^2(\omega_x, \omega_y) SPM^f(\omega_x, \omega_y), \text{ где}$$

$$SPM^*(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Omega_x \Omega_y} S^*(\omega_x, \omega_y) \cdot conj\{S^*(\omega_x, \omega_y)\},$$

$conj\{*\}$  - оператор комплексного сопряжения.

Используя равенство Парсеваля

$$(2.4.20) \quad \sum_{\omega_x=0}^{\Omega_x-1} \sum_{\omega_y=0}^{\Omega_y-1} SPM^f(\omega_x, \omega_y) = \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} f^2[n_x, n_y]$$

и учитывая равномерность СПМ белого шума на основании (2.4.19) и (2.4.20) нетрудно получить равенство, связывающее дисперсии белого шума  $N(0, \sigma_{БШ})$  на входе линейного фильтра, и окрашенного шума  $\theta(0, \sigma_{Ш})$  на выходе:

$$(2.4.21) \quad \sigma_{БШ}^2 = \frac{N_x N_y \sigma_{Ш}^2}{\sum_{\omega_x=0}^{\Omega_x-1} \sum_{\omega_y=0}^{\Omega_y-1} APF^2(\omega_x, \omega_y)},$$

отсюда

$$(2.4.22) \quad \sigma_{\text{БШ}} = \sigma_{\text{Ш}} \sqrt{\frac{N_x N_y}{\sum_{\omega_x=0}^{\Omega_x-1} \sum_{\omega_y=0}^{\Omega_y-1} APF^2(\omega_x, \omega_y)}}.$$

Учитывая (2.4.20) и (2.4.18) знаменатель под корнем можно представить

$$(2.4.23) \quad \sum_{\omega_x=0}^{\Omega_x-1} \sum_{\omega_y=0}^{\Omega_y-1} APF^2(\omega_x, \omega_y) = N_x N_y \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \text{ЭСФРТ}^2(n_x, n_y),$$

тогда (2.4.22) будет эквивалентно следующему:

$$(2.4.24) \quad \sigma_{\text{БШ}} = \frac{\sigma_{\text{Ш}}}{\sqrt{\sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \text{ЭСФРТ}^2(n_x, n_y)}}.$$

Таким образом, зная среднеквадратичное отклонение невязки линейной модели и параметры ЭСФРТ достаточно просто определить СКО белого гауссовского шума, эквивалентного шуму модели, но подаваемого на вход эквивалентного фильтра.

Тогда математическую модель оператора преобразования  $A_{K^*}$  (для фиксированных изображения  $f(i,j)$  и параметров алгоритма сжатия  $A(\vec{p} = \text{const})$ ) кодером можно представить в следующем виде:

$$(2.4.25) \quad A_{K^*} \{f\} = (f + \hat{N}(0, \sigma_{\text{БШ}})) \otimes \text{ЭСФРТ}, \text{ где}$$

$\hat{N}(0, \sigma_{\text{БШ}})$  - случайное гауссовское двумерное поле с нулевым средним.

Так, для рассматриваемого примера (рис.2.4.13÷2.4.14) ЭСФРТ соответствует СФРТ  $\{A_{\text{ТИ}}=195\}$ , при этом СКО аддитивного шума  $\sigma_{\text{Ш}}=8,04$ . По формуле (2.4.24) и значениям СФРТ дисперсия эквивалентного гауссовского шума равна

$\sigma_{\text{БШ}}=8,04:0,53=15,276$ . На рис.2.4.15. показано исходное изображение (а), оно же зашумленное аддитивным гауссовским шумом с параметрами (0;15) (в) и далее свернутое с фильтром, эквивалентным СФРТ  $\{A_{\text{ТИ}}=195\}$  (г). Для сравнения рядом приведено реально сжатое изображение алгоритмом JPEG-30 (б).

Далее на основе полученных моделей, найденных для различных изображений, находились характеристики изображений, к которым чувствительны ЭСФРТ и “замораживание” которых позволяет использовать единственную ЭСФРТ для всех изображений с заданными фиксированными значениями этих характеристик.

Поскольку ИО алгоритма сжатия нелинеен и зависит в основном от дифференциальной яркости ТИ, логично исследовать зависимость параметров линеаризованной модели оператора преобразования от показателя среднего контраста изображения  $\mu$ . В ходе таких исследований было установлено, что для изображений с одинаковой степенью корреляции элементов изображения ( $S=\text{const}$ ) статистические средние параметров модели оператора преобразования (ЭСФРТ и  $\sigma_{\text{БШ}}$ ) достаточно точно ( $R^2 \geq 0,85$ ) описываются линейными регрессиями. В качестве примера на рис.2.4.16 и 2.4.17 показаны регрессии параметров линеаризованных моделей для изображений, использованных ранее для исследования влияния среднего контраста на показатель результативности кодирования.

Поскольку показатель  $\mu$  совместно с показателем степени корреляции элементов  $S$  достаточно полно характеризуют статистические свойства изображения, были исследованы зависимости параметров модели оператора преобразования (ЭСФРТ и  $\sigma_{\text{БШ}}$ ) от  $S$ , однако существенной зависимости выявлено не было.

Таким образом, при фиксированных значениях параметров алгоритма ( $A(\vec{p}) = \text{const}$ ) для произвольного изображения со средним контрастом  $\mu$  в качестве

приближенной математической модели (на основе статистического осреднения) оператора преобразования  $A_{A(\vec{p})}$  кодером можно использовать оператор вида:

$$(2.4.26) \quad A_{A(\vec{p})}\{f\} = (f + \hat{N}\{0, \bar{\sigma}_{\text{БШ}}(\mu)\}) \otimes \overline{\text{ЭСФРТ}}(\mu) = \hat{f}_{\text{СЖ}}, \text{ где}$$

$\bar{\sigma}_{\text{БШ}}(*)$  и  $\overline{\text{ЭСФРТ}}(*)$  - математические ожидания,  $\vec{p}_i \in \mathbb{R}$ .

Поскольку множество допустимых векторов параметров алгоритма конечно и счетно, для любых значений  $\vec{p}_i$  заданного алгоритма на основе статистического оценивания  $\bar{\sigma}_{\text{БШ}}(*)$  и  $\overline{\text{ЭСФРТ}}(*)$  для изображений с различными значениями показателя  $\mu$  экспериментальным путем нетрудно получить оценки параметров модели (2.4.26).

### **2.4.2.3. Верификация модели оператора преобразования**

Проверка модели на адекватность включает в себя две фазы: определение способов проверки и осуществление этой проверки [Иссл.оп]. На первой фазе выбираются аналитические и (или) экспериментальные методы для проверки *непротиворечивости, чувствительности, реалистичности и работоспособности* модели. Каждая из этих характеристик построенной модели рассматривается ниже.

Проверка на *непротиворечивость* заключается в ответе на вопрос, дает ли модель не противоречащие логике результаты при вариации величин важнейших параметров. Проверка на *чувствительность* состоит в проверке, соответствуют ли относительные изменения выходных переменных модели небольшим изменениям ее параметров. Соответствие модели кодера этим требованиям не вызывает сомнения, поскольку математические зависимости, связывающие входные и выходные характеристики, получаются на основе экспериментальных данных.

Проверка на *реалистичность* заключается в проверке соответствия модели тем частным случаям, для которых уже имеются фактические данные. Поэтому для проверки по этому критерию модели оператора искажения ВД были использованы данные, полученные в разделе 2.1.

При проверке модели оператора искажения ВД в ходе психофизического эксперимента сравнивались регрессии правильной классификации объектов ВВТ по реально сжатым цифровым изображениям и по модельным, имитирующим оператор искажения алгоритмом сжатия для аналогичных входных параметров. В качестве примера на рис.2.4.19 и 2.4.20 для сравнения приведены регрессии вероятности правильной классификации объекта «Шеридан» до класса по реальным сжатым изображениям и по их модельным эквивалентам. Анализ полученных данных позволяет сделать вывод, что по основному показателю - вероятности правильной классификации объектов точность модельных изображений не выходит за рамки требуемой точности модели -  $10 \div 15\%$ .

При проверке модели оператора преобразования разрядности кода ВД сравнивались кривые плотности кодирования реально сжатых в ходе психофизического эксперимента цифровых изображений и оцененные по другим изображениям (с эквивалентными показателями  $S$  и  $\mu$ ) регрессия и дисперсия плотности кодирования. В качестве примера на рис.2.4.21 для сравнения приведены расчетные по модели плотности кодирования ( $\pm 1,5 \sigma$ ) и реальные. Анализ полученных данных позволяет сделать вывод, что реальные значения плотности кодирования для изображений, полученных в ходе эксперимента не выходят за рамки вероятностной модели с точностью  $\pm 1,5 \sigma$ .

Проверка на *реалистичность* заключается в получении ответа на вопрос, легко ли получить решение с помощью предлагаемой модели. В рамках рассматриваемой модели реалистичность модели не вызывает сомнений.

#### 2.4.2.4. Математическая модель кодера

На основе полученной модели оператора преобразования ВД кодером нетрудно определить показатели точности передачи ВД (погрешности сжатия). В качестве таких показателей целесообразно использовать параметры модели -  $\bar{\sigma}_{\text{БШ}}$  и  $\overline{\text{ЭСФРТ}}$ . Возможность и целесообразность использования в качестве показателей качества линейного (линеаризованного) звена его передаточные характеристики подтверждена многолетней практикой анализа и синтеза линейных систем. Кроме того, использование этих показателей качества позволит гармонично вписать модель всей ПсПВД в качестве дополнительного звена в существующие модели СИТ оптико-электронных систем. Таким образом, модель показателя точности передачи ВД  $\bar{\eta} = \langle \overline{\text{ЭСФРТ}}, \bar{\sigma}_{\text{БШ}} \rangle$  кодером будет представлять собой получаемые по описанной выше методике экспериментальные оценки  $\bar{\sigma}_{\text{БШ}}$  и  $\overline{\text{ЭСФРТ}}$ , являющиеся функционалами от параметров алгоритма сжатия и показателя среднего контраста изображения:

$$(2.4.27) \quad \overline{\text{ЭСФРТ}} = \varepsilon\{A(\vec{p}_A), \mu\},$$

$$(2.4.28) \quad \bar{\sigma} = \sigma\{A(\vec{p}_A), \mu\}.$$

На основании полученных математических моделей показателя результативности кодирования (2.4.11) и показателей точности передачи ВД кодером (2.4.27, 2.4.28) можно построить математическую модель кодера. Модель (рис.2.4.18) функционально состоит из двух стохастических звеньев - моделей показателей точности передачи ВД и математической модели показателя результативности кодирования. Множество состояний кодера целиком определяется множеством допустимых значений вектора параметров алгоритма  $P$ , которое по



определению конечно и счетно. Основным входным воздействием является цифровое изображение  $f$  из множества  $F$  возможных цифровых изображений, формируемых источником видеосообщений. Основными входными параметрами для операторов модели являются показатели, характеризующие средний контраст и степень автокорреляции элементов входного изображения -  $\mu(f)$  и  $S(f)$  соответственно. Таким образом, в качестве вектора статистических характеристик ВД целесообразно использовать двухкомпонентный  $\vec{D}_f = \langle \mu(f), S(f) \rangle$ .